Problemi di Fisica

secondo principio termodinamica

PROBLEMA

Calcolare il rendimento di una macchina di Carnot che lavora fra la temperatura di ebollizione dell'acqua e quella di fusione del ghiaccio a pressione atmosferica.

SOLUZIONE

Per definizione il rendimento di una macchina di Carnot è dato dalla relazione:

$$\eta_{rev} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Nel nostro caso, $T_1 = 273$ K è la temperatura di fusione del ghiaccio e $T_2 = 373$ K è la temperatura di ebollizione dell'acqua, per cui il valore del rendimento è:

$$\eta_{rev} = 1 - \frac{273}{373} = 0{,}27 = 27\%$$

PROBLEMA

Con un rendimento $\eta = 0{,}24$ una macchina sviluppa in un'ora un lavoro pari a $1{,}2 \cdot 10^7$ J.

- Calcolare la quantità di calore che la macchina deve assorbire ogni ora da una sorgente per poter lavorare.

SOLUZIONE

Dalla definizione di rendimento ricaviamo la quantità di calore richiesta dal problema:

$$\eta = \frac{L}{Q} \Rightarrow Q = \frac{L}{\eta} = \frac{1{,}2 \cdot 10^7}{0{,}24} = 5 \cdot 10^7 \text{ J} = 1{,}2 \cdot 10^7 \text{ cal}$$

dove: 1 cal = 4,186 J; 1 J=1cal/4,186

PROBLEMA

Una macchina di Carnot compie un ciclo fra due sorgenti con un rendimento del 42,0%.

- Sapendo che la temperatura della sorgente più calda è pari a 527 °C (800 K), qual è la temperatura della sorgente più fredda?

SOLUZIONE

Dalla definizione di rendimento di una macchina di Carnot, ricaviamo la temperatura T_1 della sorgente più fredda:

$$\eta_{rev} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow T_1 = T_2 - \eta_{rev} T_2 = T_2 \cdot (1 - \eta_{rev}) = 800 \cdot (1 - 0{,}42) = 464 \text{ K}$$

PROBLEMA

Una macchina a vapore che lavora fra le temperature di 300 °C (573 K) e di 30 °C (303 K) sviluppa una potenza pari a 7360 W. Sapendo che il suo rendimento è il 30,0% di quello di un motore termico ideale (ciclo di Carnot) che lavora fra le stesse temperature estreme, calcolare la quantità di calore assorbita dalla macchina nell'unità di tempo.

SOLUZIONE

Per definizione il rendimento di una macchina di Carnot è dato dalla relazione:

$$\eta_{rev} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{303}{573} = 0{,}47$$

La macchina a vapore ha un rendimento pari al 30% di quello del motore termico ideale, e cioè pari a:

$$\eta = 30\% \cdot 0{,}47 = 0{,}14$$

Pertanto, la quantità di calore assorbita dalla macchina per unità di tempo è data da:

$$\eta = \frac{L}{Q} \Rightarrow Q = \frac{L}{\eta} = \frac{7360}{0{,}14} = 52571 \text{ J} = 12{,}6\,\text{kcal} \qquad 1 \text{ cal} = 4{,}186 \text{ J}; \quad 1 \text{ J} = 1\text{cal}/4{,}186$$

PROBLEMA

Una macchina termica, assimilabile a quella di Carnot, funziona fra due sorgenti: la prima costituita da vapore acqueo a 373 K e la seconda da una massa di 5,00 kg di ghiaccio a 273 K.

- Nell'ipotesi che la macchina venga fatta funzionare finché tutto il ghiaccio non è fuso, qual è la massa di vapore che si trasforma in acqua?

(Calore latente di fusione del ghiaccio: L_f = 79,7 kcal/kg; calore latente di vaporizzazione dell'acqua: L_V = 537 kcal/kg)

SOLUZIONE

Indichiamo con T_2 = 373 K la temperatura della sorgente calda e con T_1 = 273 K quella della sorgente fredda. Poiché la macchina è assimilabile a quella di Carnot, il suo rendimento è:

$$\eta_{rev} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{273}{373} = 0{,}268 = 26{,}8\%$$

Il calore ceduto dalla macchina alla sorgente fredda è quello che serve a fondere la massa m = 5,00 kg di ghiaccio, cioè:

$$Q_1 = mL_f = 5{,}00 \cdot 79{,}7 = 399\,\text{kcal}$$

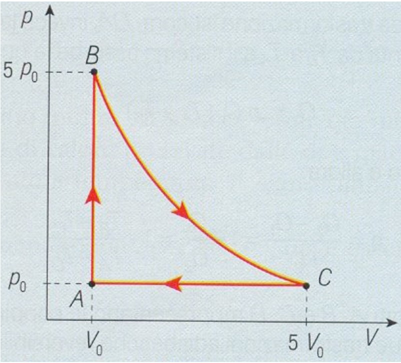
Il calore Q_2 prelevato dalla sorgente calda può essere ricavato dalla relazione generale:

$$\eta = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} \Rightarrow Q_2 = \frac{Q_1}{1-\eta} = \frac{399}{1 - 0{,}268} = 545\,\text{kcal}$$

La massa di vapore acqueo che si condensa è allora:

$$m_C = \frac{Q_2}{L_V} = \frac{545}{537} = 1{,}01\,\text{kg}$$

PROBLEMA



Una mole di gas perfetto biatomico compie un ciclo come quello rappresentato in figura, dove *AB* è una trasformazione a volume costante, BC una trasformazione a temperatura costante e *CA* una trasformazione a pressione costante.

- Calcolare il rendimento del ciclo nell'ipotesi che tutte le trasformazioni siano reversibili.

SOLUZIONE

Durante il ciclo il gas assorbe una quantità di calore Q_{AB} nella trasformazione AB, per aumentare la sua pressione a volume costante, e una quantità di calore Q_{BC} nella trasformazione BC, per espandersi a temperatura costante. Il calore Q_2 complessivamente assorbito è:

$$Q_2 = Q_{AB} + Q_{BC} \quad (1)$$

Il gas cede invece il calore:

$$Q_1 = Q_{CA} \quad (2)$$

nella trasformazione CA, dove è compresso a pressione costante. Calcoliamo dunque le quantità di calore scambiate nelle varie trasformazioni.

Trasformazione AB:

Poiché il sistema passa dalla pressione p_0 alla pressione $5p_0$ con una trasformazione isocora, la temperatura passa, essendo direttamente proporzionale alla pressione, da un valore T_0 a un valore $5T_0$. Allora, essendo n = 1 e ricordando che il calore molare a volume costante di un gas biatomico è $C_V = 5/2R$, possiamo scrivere:

$$Q_{AB} = nC_V(5T_0 - T_0) = 1 \cdot \frac{5}{2}R \cdot 4T_0 = 10RT_0$$

Trasformazione BC:

Si tratta di un processo isotermico, alla temperatura $5T_0$, in cui il volume passa dal valore V_0 al valore $5V_0$. Poiché il calore assorbito è uguale al lavoro compiuto, ricordando l'espressione del lavoro in tale processo, abbiamo:

$$Q_{BC} = nRT\ln\frac{V_2}{V_1} = 5nRT_0\ln\frac{5V_0}{V_0} = 5RT\ln 5$$

Trasformazione CA:

Il sistema si riporta alle condizioni di partenza, cioè alla temperatura T_0, partendo dalla temperatura $5T_0$ mediante una trasformazione a pressione costante. Essendo $C_p = 7/2R$ il calore molare a pressione costante, abbiamo:

$$Q_{CA} = nC_p(5T_0 - T_0) = 1 \cdot \frac{7}{2}R \cdot 4T_0 = 14RT_0$$

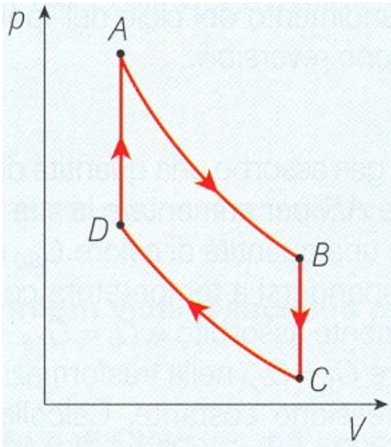
Dunque la (1) e la (2) diventano:

$$Q_2 = 10RT_0 + 5RT_0\ln 5 \qquad Q_1 = 14RT_0$$

In definitiva, il rendimento del ciclo sarà:

$$\eta = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{10RT_0 + 5RT_0\ln 5 - 14RT_0}{10RT_0 + 5RT_0\ln 5} = \frac{5RT_0\ln 5 - 4RT_0}{10RT_0 + 5RT_0\ln 5} = \frac{RT_0(5\ln 5 - 4)}{RT_0(10 + 5\ln 5)} = \frac{5\ln 5 - 4}{10 + 5\ln 5} = 0{,}22 = 22\%$$

PROBLEMA



Un gas perfetto compie il ciclo rappresentato, formato da due trasformazioni adiabatiche, *AB* e *CD,* e da due trasformazioni isocore, BC e *DA.*

1. Nell'ipotesi che tutte le trasformazioni siano reversibili, esprimere in funzione delle temperature T_A, T_B, T_C, T_D il rendimento del ciclo.

Un simile ciclo, chiamato *ciclo Otto,* descrive il funzionamento ideale dei motori a scoppio a benzina a quattro tempi.

2. Nell'ipotesi che il rapporto di compressione sia 8 a 1, nel senso che si abbia $V_A/V_C = 1/8$, e che il gas considerato sia biatomico, con $\gamma = 1{,}4$, calcolare il valore del rendimento.

SOLUZIONE

1. Durante le trasformazioni adiabatiche le quantità di calore scambiate sono nulle. Nella trasformazione isocora BC la temperatura diminuisce da T_B a T_C e il sistema cede all'ambiente la quantità di calore:

$$Q_1 = nC_V(T_B - T_C)$$

Nella seconda trasformazione isocora, DA, invece, la temperatura aumenta da T_D a T_A e il sistema assorbe la quantità di calore:

$$Q_2 = nC_V(T_A - T_D)$$

Il rendimento è allora:

$$\eta = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{nC_V(T_B - T_C)}{nC_V(T_A - T_D)} = 1 - \frac{T_B - T_C}{T_A - T_D} \qquad (1)$$

2. Poiché gli stati *A,* B e C, D rappresentano le coppie di stati estremi di due trasformazioni adiabatiche reversibili, si ha:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$

$$T_D V_D^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$

Sottraendo membro e tenendo conto che $V_A = V_D$ e V_B 0 V_C, possiamo scrivere:

$$\frac{T_B - T_C}{T_A - T_D} = \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma-1}$$

e per la (1), otteniamo che il rendimento del ciclo Otto è:

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma-1} = 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{1{,}4-1} = 0{,}56 = 56\%$$

Considerazione - Il rendimento trovato rappresenta un valore puramente teorico; in pratica, i motori a benzina presentano generalmente un rendimento dell'ordine del 20-30%. Ciò dipende da molteplici fattori: gli attriti, le resistenze passive, la non perfetta adiabaticità dei processi, l'imperfetta combustione del fluido, ecc.

PROBLEMA

Una macchina termica estrae 200 J di calore da una sorgente calda, a 380 K, compie un lavoro di 45,0 J e cede (200 - 45,0) J = 155 J a un termostato freddo, a 290 K.

- Calcolare quanto lavoro si perde in ogni ciclo, a causa dell'irreversibilità dei processi reali, rispetto a una macchina ideale che, assorbendo la stessa quantità di calore dalla sorgente calda, compia trasformazioni tutte reversibili.

SOLUZIONE

Posto Q_2 = 200 J ed L = 45 J, il rendimento della macchina reale è, per definizione:

$$\eta = \frac{L}{Q_2} = \frac{45}{200} = 0{,}225 = 22{,}5\%$$

Il miglio rendimento possibile di una macchina reversibile che lavori fra le temperature T_2 = 380 K e T_1 = 290 K è:

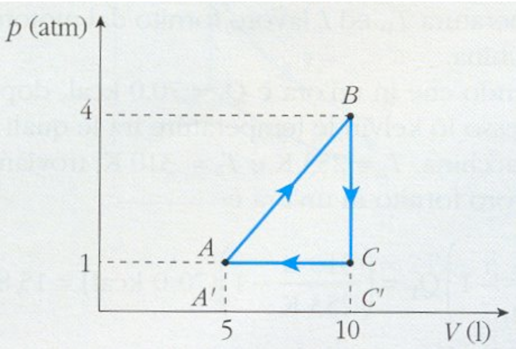
$$\eta_{rev} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{290}{380} = 0{,}237 = 23{,}7\%$$

Poiché la macchina di Carnot potrebbe compiere un lavoro:

$$L_{rev} = \eta_{rev} Q_2 = 0{,}237 \cdot 200 = 47{,}4\,J$$

mentre la macchina reale compie un lavoro pari a 45J, per ogni ciclo si perdono 2,4 J.

PROBLEMA



Calcolare il rendimento di una macchina termica che, utilizzando un gas perfetto biatomico, compie un ciclo come quello rappresentato in figura.

SOLUZIONE

Il rendimento, per definizione, è dato da:

$$\eta = \frac{L}{Q_{AB}} \quad (1)$$

dove L è il lavoro totale compiuto nel ciclo, uguale all'area del triangolo *ABC*:

$$L = \frac{AC \cdot CB}{2} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 1{,}013 \cdot 10^{5}}{2} = 760\,J$$

mentre Q_{AB} è il calore assorbito durante la trasformazione *AB* (nelle trasformazioni *BC* e *CA* il calore viene invece ceduto).
Per determinare Q_{AB} utilizziamo il primo principio della termodinamica:

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} + L_{AB} \quad (2)$$

dove:

$$\Delta U_{AB} = nC_V(T_B - T_A) \quad (3)$$

è la variazione di energia interna fra gli stati *A* e *B.* Per calcolarla esprimiamo le temperature incognite T_B e T_A in funzione delle pressioni e dei volumi corrispondenti ai punti *A* e *B* attraverso l'equazione di stato dei gas perfetti*:*

$$p_B V_B = nRT_B \Rightarrow T_B = \frac{p_B V_B}{nR} \qquad p_A V_A = nRT_A \Rightarrow T_A = \frac{p_A V_A}{nR}$$

e sostituiamole nella (3), tenendo presente che per un gas biatomico il calore molare vale C_V = 5/2R:

$$\Delta U_{AB} = n\frac{5}{2}R\left(\frac{p_B V_B}{nR} - \frac{p_A V_A}{nR}\right) = \frac{5}{2}(p_B V_B - p_A V_A) =$$

$$\frac{5}{2}\cdot(4\cdot 1{,}013\cdot 10^5\cdot 10\cdot 10^{-3} - 1\cdot 1{,}013\cdot 10^5\cdot 5\cdot 10^{-3}) = 8864\ \text{J}$$

Invece, il lavoro L_{AB} è quello compiuto dal sistema durante la trasformazione *AB,*ed è uguale all'area del trapezio *ABC'A':*

$$L_{AB} = \frac{BC' + A'A}{2}\cdot AC = \frac{4\cdot 1{,}013\cdot 10^5 + 1\cdot 1{,}013\cdot 10^5}{2}\cdot 5\cdot 10^{-3} = 1266\ \text{J}$$

Pertanto, la (2) assume il valore:

$$Q_{AB} = 8864 + 1266 = 10130\ \text{J}$$

Infine, il rendimento (1) avrà il seguente valore:

$$\eta = \frac{760}{10130} = 0{,}075 = 7{,}5\%$$

Attenzione - Le unità di misura inserite nelle varie formule sono quelle del S.I.:

1 atm = $1{,}013\cdot 10^5$ Pa   1 litro = 1 dm^3 = 10^{-3} m^3

PROBLEMA

Una macchina termica reversibile, che utilizza come fluido operante 25,0 moli di gas perfetto, lavora fra due sorgenti a temperatura costante T_2 = 700 K e T_1 = 300 K. Il lavoro totale prodotto dalla macchina in 30 cicli viene utilizzato per sollevare un corpo di 50,0 kg a un'altezza di 25,0 m.

Calcolare:

1. il lavoro fatto dalla macchina per ogni ciclo
2. la quantità di calore prelevata dalla sorgente a temperatura T_2 in ogni ciclo.

SOLUZIONE

1. Il lavoro compiuto dalla macchina in ogni ciclo è uguale a un trentesimo del lavoro totale L_T speso per sollevare la massa *m* = 50,0 kg all'altezza *h* = 25,0 m. Si ha perciò:

$$L = \frac{L_T}{30} = \frac{mgh}{30} = \frac{50{,}0\cdot 9{,}81\cdot 25{,}0}{30} = 409\ \text{J}$$

2. Poiché la macchina è reversibile, il suo rendimento è dato da:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{300}{700} = 0{,}571$$

Ma, essendo per definizione:

$$\eta = \frac{L}{Q_2} \qquad \text{si ricava che:} \qquad Q_2 = \frac{L}{\eta} = \frac{409}{0{,}571} = 716\,\mathrm{J}$$

PROBLEMA

Una macchina frigorifera ideale (ciclo di Carnot alla rovescia) lavora fra le temperature -20,0 °C e 37,0 °C.

- Calcolare la potenza media del motore della macchina, nell'ipotesi che essa sottragga 70,0 kcal/h.

SOLUZIONE

Il coefficiente frigorifero utile di una macchina di carnot usata alla rovescia è:

$$\varepsilon = \frac{Q_1}{L} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$$

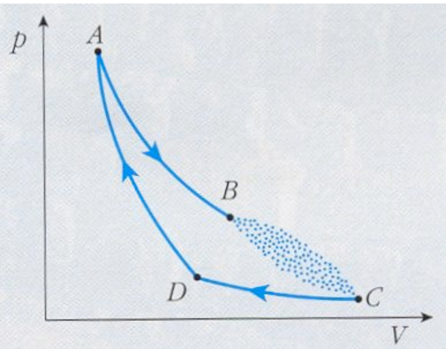
con Q_1 calore sottratto all'ambiente più freddo, a temperatura T_1, ed L lavoro fornito dal motore della macchina.
Sapendo che in un'ora è Q_1 = 70,0 kcal, dopo aver espresso in kelvin le temperature fra le quali lavora la macchina, T_1 = 253 K e T_2 = 310 K, troviamo che il lavoro fornito in un'ora è:

$$L = \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)Q_1 = \left(\frac{310}{253} - 1\right) \cdot 70{,}0 = 15{,}8\,\mathrm{kcal} = 15{,}8 \cdot 4186 = 6{,}61 \cdot 10^4\ \mathrm{J}$$

Infine, la potenza media del motore è, per definizione:

$$P = \frac{L}{t} = \frac{6{,}61 \cdot 10^4}{3600} = 18{,}4\,\mathrm{W}$$

PROBLEMA



Due moli di gas perfetto monoatomico compiono il ciclo schematizzato in figura, dove *AB* e *CD* sono isoterme reversibili, *DA* una adiabatica reversibile, mentre *BC* è una adiabatica irreversibile. Sapendo che è p_A = 6,00 atm, T_A = 300 K, p_B = 3,00 atm, V_C = 35,0 L, T_C = 200 K, calcolare il rendimento η del ciclo e confrontarlo con il rendimento η_{rev} di un ciclo di Carnot reversibile fra le stesse temperature.

SOLUZIONE

Il ciclo somiglia a un ciclo di Carnot, ma una delle trasformazioni è irreversibile, pertanto il rendimento sarà minore di quello ideale. Per calcolarlo utilizziamo la definizione:

$$\eta = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} \quad (1)$$

dove Q_2 è il calore assorbito lungo l'isoterma a temperatura T_A, per cui è uguale al lavoro eseguito dal sistema:

$$Q_2 = L_{AB} = nRT_A \ln\frac{p_A}{p_B} = 2 \cdot 8{,}31 \cdot 300 \cdot \ln\frac{6{,}00}{3{,}00} = 3456 \text{ J}$$

mentre Q_1 è il calore ceduto lungo l'isoterma a temperatura T_C, per cui è uguale al lavoro subito dal sistema:

$$Q_1 = L_{CD} = nRT_C \ln\frac{V_C}{V_D} \quad (2)$$

dove V_C è noto, mentre V_D lo ricaviamo sfruttando il fatto che AD è una trasformazione adiabatica reversibile regolata dalla relazione:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_D V_D^{\lambda-1} \qquad \text{per cui:}$$

$$V_D^{\gamma-1} = V_A^{\gamma-1} \cdot \frac{T_A}{T_D} \Rightarrow V_D = \sqrt[\gamma-1]{V_A^{\gamma-1} \cdot \frac{T_A}{T_D}} = \sqrt[\frac{5}{3}-1]{8{,}2^{\frac{5}{3}-1} \cdot \frac{300}{200}} = 15{,}2 \text{ litri}$$

dove $\gamma = 5/3$ (gas monoatomico), $T_D = T_C$ e V_A è stato trovato mediante l'equazione di stato dei gas perfetti applicata allo stato A:

$$p_A V_A = nRT_A \Rightarrow V_A = \frac{nRT_A}{p_A} = \frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{6{,}00 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5} = 8{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 8{,}2 \text{ litri}$$

Pertanto, la (2) assume il valore:

$$Q_1 = 2 \cdot 8{,}31 \cdot 200 \cdot \ln\frac{35}{15{,}2} = 2772 \text{ J}$$

In definitiva il rendimento del ciclo in oggetto assume il valore:

$$\eta = 1 - \frac{2772}{3456} = 0{,}198$$

che è inferiore a quello del ciclo di Carnot fra le stesse temperature:

$$\eta_{rev} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{200}{300} = 0{,}333$$

PROBLEMA

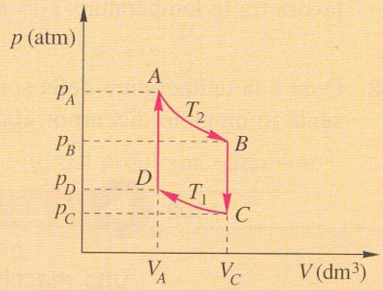
In un ciclo di Stirling *ABCDA* formato da due isoterme *AB* e *CD* e da due isocore *BC* e *DA*, 2 moli di idrogeno (H_2) si espandono tra i volumi $V_A = 1$ dm^3 e $V_B = 2{,}2$ dm^3. Se il ciclo si svolge tra le temperature $T_2 = 400$ K e $T_1 = 273$ K, calcola:

a) il lavoro prodotto dal gas verso l'esterno;

b) il lavoro subìto dal gas;

c) il lavoro prodotto in 150 cicli di funzionamento della macchina;

d) la potenza della macchina, se essa è capace di compiere 3 cicli al secondo.



■ MODELLO FISICO

Il lavoro utile verso l'esterno è caratterizzato dalla dilatazione del gas. Nel ciclo di Stirling ciò avviene solamente durante l'isoterma *AB*, in quanto nell'altra isoterma *CD* il gas è compresso, il che corrisponde a un lavoro subìto, mentre nelle altre trasformazioni il lavoro è nullo, essendo due isocore.

■ SOLUZIONE

Il lavoro effettuato dal gas durante una trasformazione isoterma è:

$$L = nRT \ln\left(\frac{V_{fin}}{V_{ini}}\right)$$

dove n è il numero di moli, R è la costante dei gas, T la temperatura alla quale avviene la trasformazione, V_{fin} e V_{ini} rispettivamente volume finale e iniziale del gas. La potenza, inoltre, è uguale al rapporto tra il lavoro svolto e il tempo impiegato: $P = L/t$. Quindi:

a) il lavoro è prodotto dal gas nell'isoterma *AB* ed è:

$$L_{AB} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) =$$
$$= 2 \cdot 8{,}31\ \text{J/K} \cdot 400\ \text{K} \cdot \ln(2{,}2) \cong 5241{,}66\ \text{J}$$

b) il lavoro è subìto nell'isoterma *CD*:

$$L_{CD} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) =$$
$$= 2 \cdot 8{,}31\ \text{J/K} \cdot 273\ \text{K} \cdot \ln\left(\frac{1}{2{,}2}\right) \cong -3577{,}44\ \text{J}$$

c) il lavoro netto in un ciclo è la somma algebrica dei lavori:

$$L_1 = (5241{,}66 - 3577{,}44)\ \text{J} = 1664{,}22\ \text{J}$$

In 150 cicli il lavoro totale è

$$L_{150} = 150 \cdot L_1 \cong 249{,}63\ \text{kJ}$$

d) la potenza è calcolata moltiplicando il lavoro di un ciclo per 3 (numero di cicli al secondo) e dividendolo per il tempo impiegato:

$$P = \frac{1664{,}22\ \text{J} \cdot 3}{1\ \text{S}} = 4992{,}66\ \text{W}$$

PROBLEMA

Una centrale elettrica opera al 75% del suo rendimento teorico di Carnot, tra le temperature di 350 °C e 600 °C.

- Sapendo che la centrale produce energia per 1.3 GW, quanto calore disperde in un'ora ?

SOLUZIONE

Dalla definizione di potenza possiamo ricavare subito il lavoro prodotto dalla centrale in un'ora:

$$P = \frac{L}{t} \Rightarrow L = P \cdot t = 1{,}3 \cdot 10^9 \cdot 3600 = 4{,}7 \cdot 10^{12}\ \text{J}$$

Il rendimento teorico di Carnot è pari a:

$$\eta_{rev} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{623}{873} = 0{,}29$$

per cui il rendimento della centrale elettrica, essendo il 75% di quello teorico di Carnot, ammonta a:

$$\eta = 0{,}75 \cdot 0{,}29 = 0{,}22$$

A questo punto cerchiamo di esprimere il calore ceduto in funzione del lavoro L e del rendimento della centrale elettrica.
Il lavoro è la differenza tra il calore assorbito Q_a e quello ceduto Q_c:

$$L = Q_a - Q_c \quad (1)$$

Dalla definizione di rendimento ricaviamo il calore assorbito:

$$\eta = \frac{L}{Q_a} \Rightarrow Q_a = \frac{L}{\eta} \qquad \text{che sostituito nella (1) si ha:} \quad L = \frac{L}{\eta} - Q_C$$

da cui è possibile ricavare il calore ceduto:

$$Q_C = \frac{L}{\eta} - L = L\left(\frac{1}{\eta} - 1\right)$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$Q_C = 4{,}7 \cdot 10^{12} \cdot \left(\frac{1}{0{,}22} - 1\right) = 16{,}7 \cdot 10^{12}\ J/h$$

PROBLEMA

Una macchina di Carnot assorbe in un ciclo un calore di 2000 J dalla sorgente a temperatura maggiore e compie un lavoro di 1500 J.

- Se la temperatura della sorgente più fredda è di 200 K, qual'è il valore della temperatura della sorgente calda?

SOLUZIONE

Il lavoro è la differenza tra il calore assorbito Q_a alla temperatura più alta T_{calda} e quello ceduto Q_c alla temperatura più fredda T_{fredda}:

$$L = Q_a - Q_c \qquad \text{da cui:} \quad Q_C = Q_a - L = 2000 - 1500 = 500\,J$$

In una macchina di Carnot è vero che:

$$\frac{Q_c}{Q_a} = \frac{T_F}{T_C}$$

da cui è possibile ricavare il valore della temperatura della sorgente calda:

$$T_C = T_F \cdot \frac{Q_a}{Q_c} = 200 \cdot \frac{2000}{500} = 800\,K$$

PROBLEMA

Una macchina termica avente come fluido termodinamico una mole di gas perfetto biatomico, esegue il seguente ciclo:

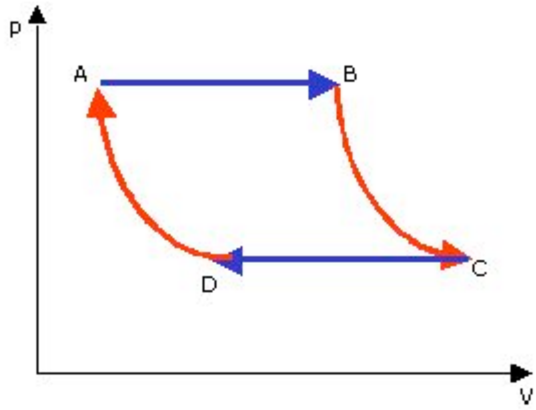
(1) Isobara reversibile dallo stato A avente p_A=3 atm e V_A=8 l allo stato B avente V_B=16 l;
(2) Espansione adiabatica reversibile fino ad uno stato C;
(3) Compressione isobara reversibile fino ad uno stato D;
(4) Compressione adiabatica reversibile fino a tornare allo stato di partenza;

Sapendo che il rendimento della macchina è η = 0.183:

a) Disegnare il ciclo nel piano (p,V);
b) Trovare il lavoro compiuto nel ciclo;
c) Trovare il calore scambiato in ognuna delle 4 trasformazioni.

SOLUZIONE

a) Il ciclo termodinamico eseguito dalla macchina termica è rappresentato in figura.



b) Il rendimento di una macchina termica è definito come:

$$\eta = \frac{L}{Q_a}$$ dove Q_a è il calore assorbito nel ciclo

Nel nostro caso il calore viene assorbito solo nel tratto AB (espansione isobara reversibile), in quanto durante le trasformazioni adiabatiche non vi è scambio di calore:

$$Q_a = Q_{AB} = nC_p(T_B - T_A) \quad (1)$$

Applicando la legge dei gas perfetti allo stato A e B, calcoliamo T_A e T_B:

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{3 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 8{,}31} = 293 \text{ K} \qquad T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{3 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 16 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 8{,}31} = 585 \text{ K}$$

e sapendo che per un gas biatomico C_p = 7/2R, la (1) assume il valore:

$$Q_a = 1 \cdot \frac{7}{2} \cdot 8{,}31 \cdot (585 - 293) = 8493 \text{ J}$$

Possiamo ora ricavare il lavoro prodotto nel ciclo dalla macchina dalla definizione di rendimento:

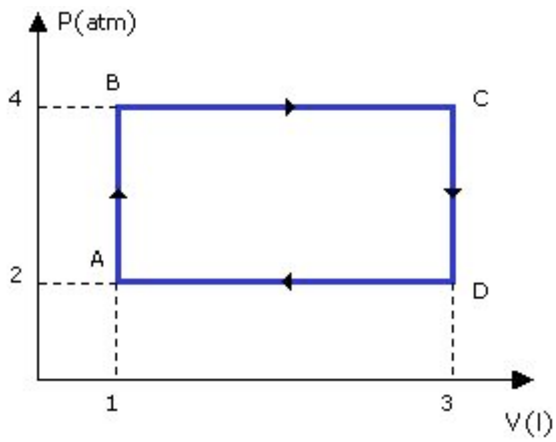
$$L = \eta Q_a = 0{,}183 \cdot 8493 = 1554 \text{ J}$$

b) Determiniamo ora il calore scambiato dal gas nelle quattro trasformazioni. Nel tratto AB lo abbiamo già trovato, nelle due adiabatiche il calore scambiato è zero, mentre per calcolare il calore scambiato nella compressione isobara CD utilizziamo il primo principio della termodinamica. Dato che ΔU = 0 in un ciclo, si ha che:

$$Q_{AB} + Q_{CD} = L \Rightarrow Q_{CD} = L - Q_{AB} = 1554 - 8493 = -6939 \text{ J}$$

Essendo $Q_{CD} < 0$, si tratta di calore ceduto.

PROBLEMA



0,2 moli di gas perfetto monoatomico seguono il ciclo termodinamico come in figura.

- Calcolare il rendimento del ciclo

SOLUZIONE

Il rendimento de ciclo, per definizione , è dato dalla relazione:

$$\eta = \frac{L}{Q_{ass}}$$

Il lavoro è uguale all'area racchiusa dal ciclo:

$$L = AD \cdot AB = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 1{,}013 \cdot 10^{5} = 405\,J$$

Il calore viene assorbito soltanto lungo l'isocora AB e lungo l'isobara BC, dove il gas si riscalda:

$$Q_{AB} = nC_V(T_B - T_A) \qquad Q_{BC} = nC_p(T_C - T_B) \quad (1)$$

mentre nei tratti CD e DA il gas cede calore. Però bisogna prima calcolare la temperatura negli stati A, B, e C. Utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti, otteniamo:

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{2 \cdot 1{,}013 \cdot 10^{5} \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{0{,}2 \cdot 8{,}31} = 122\,K \qquad T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{4 \cdot 1{,}013 \cdot 10^{5} \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{0{,}2 \cdot 8{,}31} = 244\,K$$

$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{4 \cdot 1{,}013 \cdot 10^{5} \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{0{,}2 \cdot 8{,}31} = 730\,K$$

Pertanto le (1) assumono i seguenti valori:

$$Q_{AB} = 0{,}2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8{,}31 \cdot (244 - 122) = 304\,J \qquad Q_{BC} = 0{,}2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8{,}31 \cdot (730 - 244) = 2019\,J$$

Il calore totale assorbito vale:

$$Q_{ass} = Q_{AB} + Q_{BC} = 304 + 2019 = 2323\,J$$

In conclusione, il rendimento del ciclo assume il valore:

$$\eta = \frac{405}{2323} = 0{,}174 = 17{,}4\%$$

PROBLEMA

Un motore a benzina a quattro cilindri ha un rendimento di 0.25 e produce 200 J di lavoro a ciclo per cilindro. Se la combustione avviene a 25 cicli al secondo, si calcoli:

a) la potenza del motore, ovvero il lavoro compiuto dal motore in un secondo;
b) il calore totale fornito al secondo dal carburante;
c) se l'energia contenuta nella benzina è di circa 34 MJ per litro, ed assumendo che tutta l'energia si trasformi in calore fornito al motore, quanto tempo dureranno 10 litri di benzina?

SOLUZIONE

a) Il lavoro fatto dal motore in un ciclo è uguale a quattro volte il lavoro del singolo cilindro:

$$L_M = 4L = 4 \cdot 200 = 800\,J$$

Dato che in un secondo il motore compie 25 cicli, la potenza è uguale al lavoro fatto in un ciclo moltiplicato il numero di cicli al secondo:

$$P = N \cdot L_M = 25 \cdot 800 = 20000 = 20\,kW$$

b) Dalla definizione di rendimento si ricava che il calore assorbito dal motore in un secondo è dato da:

$$Q_{ass} = \frac{L_M}{\eta}$$

Poiché il lavoro fatto in un secondo è di 20 kJ ($L = P \cdot t = 20 \cdot 1 = 20$ kJ), si ha:

$$Q_{ass} = \frac{20 \cdot 10^3}{0{,}25} = 80\,kJ$$

c) Se l'energia contenuta in un litro di benzina è 34 MJ, l'energia contenuta in 10 litri di benzina è:

$$E = 10 \cdot 34 = 340\,MJ$$

che bruceranno in un tempo pari a:

$$t = \frac{E}{Q_{ass}} = \frac{340 \cdot 10^6}{80 \cdot 10^3} = 4250\,s = 1{,}18\,ore$$

PROBLEMA

Un uomo compie un lavoro sviluppando una potenza media pari a 41,9 W, ipotizzando che il rendimento dell'uomo, considerato come una macchina termica, sia costantemente del 15,0%.

- Calcolare in quante ore l'organismo consumerà, attraverso i processi di metabolizzazione, 3000 kcal.

SOLUZIONE

Dalla definizione di rendimento ricaviamo il lavoro sviluppato dall'uomo:

$$\eta = \frac{L}{Q} \Rightarrow L = \eta Q = 0{,}15 \cdot 3000 \cdot 10^3 \cdot 4{,}186 = 1{,}9 \cdot 10^6\,\mathrm{J}$$

Dalla definizione di potenza ricaviamo il tempo che impiega l'organismo dell'uomo per consumare 3000 kcal:

$$P = \frac{L}{t} \Rightarrow t = \frac{L}{P} = \frac{1{,}9 \cdot 10^6}{41{,}9} = 45346\,\mathrm{s} = 12{,}6\,\mathrm{h} = 12^{h}36^{min}0^{s}$$